OLYMPIÁDA MLADÝCH VEDCOV

Letná príprava účastníkov

Riešenia povinných úloh - Fyzika

Termín odovzdania: 17.09.2023

Riešenia úloh (pokojne aj čiastočné) s postupom odovzdávaj na e-mailovú adresu ***zuzana.magyarova@ijso.sk****.*

Fyzika - Povinné úlohy

Úloha 1: Snellovo okno

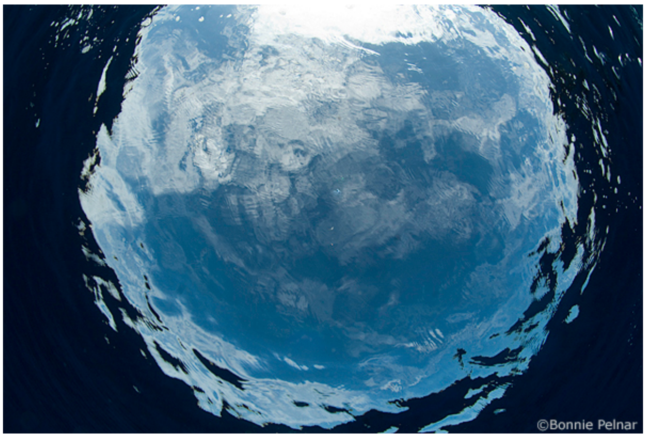
Potápači plávajúci vo vode vidia na hladine vody namiesto celej oblohy len svetlý kruh ako na Obr. 1.

a) (3b) Vysvetlite princíp pozorovaného javu.

b) (5b) Vypočítajte vrcholový uhol 2α, ktorý zodpovedá kužeľu svetlej oblohy, ktorý potápači vidia.

c) (2b) Ak sa potápači nachádzajú v hĺbke 5 m, aký je polomer svetlého kruhu?

Uvažujte, že index lomu vody je $n_w = 1.33$.



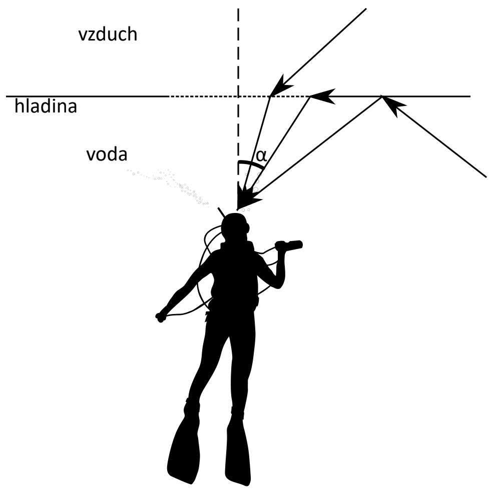
Obr. 1: Svetlý kruh oblohy z pohľadu potápača

Riešenie

a) Svetelné lúče sa pri prechode z opticky redšieho prostredia (vzduch) do opticky hustejšieho prostredia (voda) lámu ku kolmici, čiže uhol vzhľadom na kolmicu k rozhraniu, pod ktorým sa lúč šíri, sa zmenší. (1 bod)

   Keď sa na to pozrieme z pohľadu potápača, bude to vyzerať nasledovne. Lúče, ktoré dopadajú kolmo na hladinu prejdú cez rozhranie priamo k potápačovi. Akonáhle potápač začne zväčšovať uhol α, pod ktorým sa pozerá na hladinu, tak uvidí svetlo, ktoré dopadá na hladinu pod uhlom väčším ako α. Nakoniec dôjde až do bodu, kde uvidí lúče, ktoré sa šírili rovnobežne s hladinou. No a za touto hranicou dochádza k úplnému odrazu a potápač bude vidieť iba lúče, ktoré prichádzajú spod hladiny a odrážajú sa od hladiny ako od zrkadla. Ale keďže pod hladinou nie je zdroj svetla, potápač neuvidí nič. (2 body) Pozri Obr. 2

b) Vrcholový uhol je určený podmienkou úplného odrazu lúčov od rozhrania. Tú dostaneme zo Snellovho zákona $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, kde n_i sú indexy lomu na jednotlivých stranách rozhrania a θ_i sú uhly lúčov od kolmice na jednotlivých stranách rozhrania. (2 body)



Obr. 2: Schematické znázornenie potápača a svetelných lúčov

V prípade úplného odrazu na rozhraní vzduch–voda je v redšom prostredí uhol, pod ktorým sa lúč šíri, rovný 90°. Index lomu vzduchu je 1, takže podmienka pre úplný odraz je $n_w \sin\alpha = 1$ (2 body)

Úpravou tejto rovnice dostaneme výsledok pre vrcholový uhol (1 bod)

$$2\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{n_w} \doteq 97.5°.$$

c) Polomer svetlého kruhu r zistíme triviálne z uhla α a hĺbky potápačov. Platí $\tan\alpha = \frac{r}{h}$. Úpravou dostaneme $r = h \tan\alpha \doteq 5.7$ m. (2 body)

Úloha 2: Stlačený plyn

V pretlakovej fľaši s objemom 100 L máme 10 mol hélia, ktoré má teplotu 300 K.
Kontrolné otázky:

a) (0.5b) Koľko atómov hélia je vo fľaši?

b) (0.5b) Aký tlak je vo fľaši?

c) (0.5b) Aká je hodnota teploty v °C?

K ventilu fľaše pripevníme úplne prázdnu nádobu s pohyblivým piestom (mení objem nádoby). Na začiatku je piest na dne nádoby takže nádoba má nulový objem. Pootvoríme ventil a necháme izotermicky rozpínať hélium do nádoby (pomaly sa bude posúvať piest a zväčšovať objem nádoby), kým nedosiahne objem 10 L.

d) (1.5b) Aký bude tlak v nádobe s piestom?

e) (1b) Od fľaše s objemom 100 L odpojíme nádobu s piestom. Koľko hélia bude v nádobe?

Vďaka tomu, že jednu jej časť tvorí pohyblivý piest, možno z nej vytvoriť tepelný stroj. Jeden cyklus takéhoto stroja pozostáva zo štyroch fáz. Najprv budeme hélium izochoricky zahrievať na dvojnásobný tlak. Následne zahrievaním hélia izobaricky strojnásobíme objem nádoby (posunieme piest). Potom izochoricky schladíme hélium na pôvodný tlak a hneď na to ho schladíme aj na pôvodný objem izobaricky.

f) (3b) Akú najvyššiu teplotu bude mať hélium v nádobe a kedy presne to bude?

g) (3b) Zakreslite celý cyklus tepelného stroja do „pV“-diagramu a potom aj do „VT“–diagramu.

Riešenie

a) Počet atómov vo fľaši zistíme z látkového množstva a Avogadrovej konštanty $N = nN_a \doteq 6.022 \cdot 10^{24}$ (0.5 boda)

b) Tlak vo fľaši vypočítame z rovnice ideálneho plyny $p = \frac{nRT}{V} \doteq 249.42$ kPa. (0.5 boda)

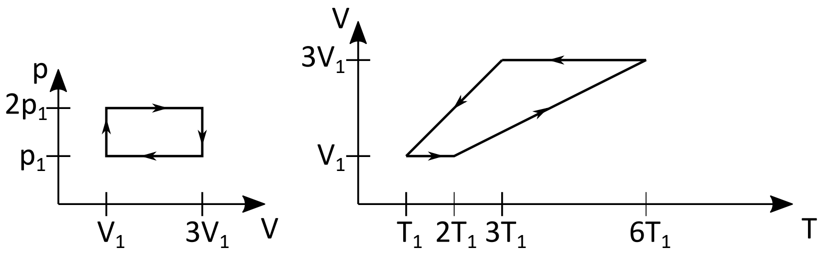
c) Platí 273.15 K = 0 °C, takže teplota hélia vo fľaši má hodnotu $T = 26.85$ °C. (0.5 boda)

d) Po pripevnení malej nádoby s piestop na fľašu sa objem hélia izotermicky zväčší z $V = 100$ L na $V + V_1 = 110$ L. Kým je fľaša s nádobou spojená, tak tlak bude v oboch rovnaký. (1 bod) Platí teda $p_1 = p\frac{V}{V+V'} = \frac{nRT}{V+V_1} \doteq 226.75$ kPa. (0.5 boda)

e) Keďže tlaky vo fľaši a nádobe sú rovnaké, množstvo hélia v každej z nich bude úmerné objemu. (0.5 boda) To znamená, že v nádobe s piestom bude látkové množstvo $n_1 = n\frac{V_1}{V+V_1} = \frac{1}{11}n \doteq 0.91$ mol. (0.5 boda)

f) V nádobe s piestom je po celý čas konštantné množstvo hélia, to znamená, že pomer $\frac{pV}{T}$ bude po celý čas konštantný. (1 bod) Teplota bude teda maximálna vtedy, keď bude maximálny tlak aj objem, čo je v našom prípade po druhej fáze, keď je tlak dvojnásobný, t. j. $2p_1$ a objem trojnásobný, t. j. $3V_1$. (1 bod) Hodnota teploty bude preto $6T_1 = 6 \cdot 300$ K = 1 800 K. (1 bod)

g) Na to, aby sme mohli zakresliť jednotlivé diagramy, potrebujeme poznať hodnoty tlaku, objemu, a teploty vo význačných bodoch, t. j. na konci jednotlivých fáz. Na začiatku má héliový plyn tlak p_1, objem V_1, a teplotu T_1. V prvej fáze sa objem plynu nemení $V_2 = V_1$, tlak sa zväčší na hodnotu $p_2 = 2p_1$ a lineárne s tlakom narastie aj teplota na $T_2 = 2T_1$. V druhej fáze sa nemení tlak, čiže $p_3 = 2p_1$, objem plynu narastá na $V_3 = 3V_1$ a lineárne s objemom narastie aj teplota na $T_3 = 3T_2 = 6T_1$. V tretej fáze sa opäť nemení objem, čiže $V_4 = 3V_1$, tlak sa vráti na pôvodný $p_4 = p_1$ a teplota lineárne na polovicu, čiže $T_4 = \frac{T_3}{2} = 3T_1$. A nakoniec pri konštantnom tlaku sa vráti objem na pôvodnú hodnotu a lineárne s ním aj teplota. (1 bod) Diagramy vyzerajú preto nasledovne (2 body):



Obr. 3: „pV“ a „VT“ diagram

Úloha 3: Spracovanie experimentu

Pred tým, než začnete s riešením, odporúčame prečítať si tento materiál: `https://ufo.fks.sk/studijne_materialy/_plugin/attachments/download/174/`

Keď nalejeme vodu do fľaše a zboku do nej urobíme dieru, bude z nej voda striekať do vzdialenosti d. Ukazuje sa, že táto vzdialenosť závisí od výšky hladiny vody vo fľaši nad dierou h, konkrétne by mohlo platiť

$$d = C\sqrt{h},$$

kde C je konštanta daná fľašou. Vašim cieľom bude overiť túto závislosť a určiť konštantu C na základe pozbieraných dát zo štyroch meraní pre rôzne výšky h, ktoré uvádzame v tabuľke.

h/cm	d/cm			
16	16,7	17,1	16,3	16,8
14	15,8	15,9	15,2	16,1
12	14,5	13,8	13,3	14,1
10	12,4	12,6	12,8	12,5
8	11,4	10,5	11,8	10,7
6	9,5	8,7	9,6	9,9
4	7,9	8,2	8,3	8,6

a) (2b) Pre každú výšku h vypočítajte priemernú vzdialenosť $\langle d\rangle$ a jej štandardnú (smerodajnú) odchýlku priemeru.

b) (5b) Z rovnice $d = C\sqrt{h}$ vyjadrite C a napíšte vzorec, podľa ktorého vypočítame chybu merania (štandardnú odchýlku) C. Predpokladajte, že výška h nie je dokonale nameraná, ale $\sigma_h = 0.1$ cm kvôli presnosti meracieho zariadenia (pravítka). *Pomôcka:* relatívna chyba (štandardná odchýlka) pre $\sqrt{x}$ je $\frac{1}{2}$ relatívnej chyby x.

c) (2b) Pre každé meranie výšky vypočítajte príslušnú hodnotu C a jeho chybu. Obe čísla zaokrúhlite na 2 desatinné miesta.

d) (1b) Nájdite také C, ktoré bude v rámci jednej štandardnej odchýlky vyhovovať všetkým meraniam.

Riešenie

a) Priemernú hodnotu vzdialenosti d vypočítame podľa vzťahu

$$\langle d\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}.$$

Štandardná (smerodajná) odchýlka priemernej vzdialenosti $\langle d\rangle$ je daná vzťahom

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \langle d\rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

V našom prípade je $n = 4$. Dostávame hodnoty

h/cm	$\langle d\rangle$/cm	σ_d/cm
16	16,73	0,17
14	15,75	0,19
12	13,93	0,25
10	12,58	0,09
8	11,10	0,30
6	9,43	0,26
4	8,25	0,14

(1 bod vzťahy, 1 bod výpočet)

b) Konštantu C dostaneme triviálnou úpravou vzťahu ako $C = \frac{d}{\sqrt{h}}$. (1 bod) Na to, aby sme určili chybu C si treba uvedomiť, že aj d aj $\sqrt{h}$ majú svoju chybu merania. Pri násobení a delení sa chyba propaguje tak, že sa sčítava relatívna odchýlka, takže platí (2 body)

$$\frac{\sigma_C}{C} = \frac{\sigma_d}{d} + \frac{\sigma_{\sqrt{h}}}{\sqrt{h}}.$$

Pomôcka je iba konkrétnou realizáciu pravidla pre výpočet relatívnej odchýlky veličiny x^n. Tá je daná súčinom exponentu n a relatívnou chybou veličiny x. Takže pre $\sqrt{h}$ platí (1 bod)

$$\frac{\sigma_{\sqrt{h}}}{\sqrt{h}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_h}{h}.$$

Tak dostávame výsledný vzťah (1 bod)

$$\sigma_C = C\left(\frac{\sigma_d}{d} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_h}{h}\right).$$

c) Využitím posledného vzťahu dostávame nasledovné hodnoty (2 body)

h/cm	$C/\sqrt{\text{cm}}$	$\sigma_C/\sqrt{\text{cm}}$
16	4,18	0,06
14	4,21	0,07
12	4,02	0,09
10	3,98	0,05
8	3,92	0,13
6	3,85	0,14
4	4,13	0,12

d) Vzdialenosť jednej štandardnej odchýlky veličiny C nám udáva hranice pre jednotlivo vypočítané $\langle C\rangle$, konkrétne $\langle C\rangle - \sigma_C$ a $\langle C\rangle + \sigma_C$, medzi ktorými chceme nájsť C vyhovuhúce všetkým meraniam (0.5 boda)

Meranie pre $h = 16$ cm nám hovorí, že vyhovujúce C by malo mať minimálnu hodnotu 4.12 $\sqrt{\text{cm}}$. No ak sa pozrieme na predposledný riadok, tak maximálna hodnota rozsahu C má hodnotu 3.99 $\sqrt{\text{cm}}$. To znamená, že neexistuje taká hodnota C, ktorá by vyhovovala všetkým meraniam (0.5 boda). To je však úplne v poriadku, tento výsledok môže naznačovať systematickú chybu pri meraní alebo, že závislosť medzi výškou h a vzdialenosťou d neplatí. Ďalším krokom by malo byť preto dôkladné znovuzanalyzovanie experimentu a dát.