



## Fyzika

### 1. Katapult

Pri dobývaní stredovekých hradov sa ako dôležitý prostriedok na prelomenie hradieb používal katapult. Bolo to zariadenie podobné žeriavu, pričom "ruka" katapultu sa mohla otáčať okolo vodorovnej osi pripevnenej k ťažkej základni. Ruka bola napínaná pružinou, ktorá po uvoľnení spôsobila otáčanie ruky až po zarážku. Na konci ruky sa nachádzala nádoba, do ktorej sa umiestňovalo strelivo - veľký kameň, nádoba s menšími kameňmi či horiaca munícia. Ruka strelivo rozbíhala a po jej zastavení na zarážke strelivo letelo ďalej smerom k hradu.

Predpokladajte, že dĺžka ruky katapultu je  $l=5m$ . Pružina, ktorá ruku napína, vytvára na konci ruky konštantnú silu  $F=9kN$ . Ruka štartuje vo vodorovnej polohe a zarážku môžeme umiestniť do troch rôznych pozícií, zodpovedajúcich uhlom  $\alpha$   $60^\circ$ ,  $65^\circ$  a  $70^\circ$  od vodorovnej polohy.

Predpokladajte, že ruka je tvorená homogénnou tyčou s hmotnosťou  $m=50kg$ , hmotnosť nádoby na strelivo a pružiny zanedbajte.

V prvej časti budeme predpokladať, že používané strelivo je zanedbateľne ľahké. Predpokladajte tiež, že katapult strieľa po rovine (zanedbajte nenulový výšku konca ruky v momente vystrelenia streliva) a odpor vzduchu neuvažujte. Zanedbajte tiež vplyv gravitácie na ruku katapultu.

- Aká bude veľkosť rýchlosti vystreleného streliva pri jednotlivých použitých zarážkach? Pri ktorej bude najväčšia?
- Aký bude dostrel katapultu v závislosti od použitej zarážky?

Vojsko útočí na hrad vzdialený  $d=150m$ .

- Aká je maximálna hmotnosť streliva, ktorou dokáže katapult zasiahnuť hrad?
- Pri ktorej polohe zarážky dokáže katapult zasiahnuť hrad maximálnou hmotnosťou streliva?
- Slovami vysvetlite, ak vám vychádzajú odpovede na otázky a) a d) rôzne.

Pozn: Práca vykonaná rukou katapultu pri otáčavom pohybe je  $W = Fl\alpha_{rad}$ , kde  $\alpha_{rad} = \frac{2\pi\alpha}{360}$  je

uhol vyjadrený v radiánoch. Energia tyče otáčajúcej sa okolo svojho konca rýchlosťou  $v$  je  $E_{ruka} = \frac{1}{6}mv^2$ . Energia telesa pohybujúceho sa rýchlosťou  $v$  je  $E_{strelivo} = \frac{1}{2}mv^2$ . Všetky riešenia najskôr zapisujte symbolicky s pomocou premenných a až potom dosadzujte konkrétne čísla.

# Olympiáda mladých vedcov 2011

## Zadanie teoretickej skúšky

---

### Riešenie

Najskôr si napíšeme zákon zachovania energie. Energia vložená do sústavy je daná silou pružiny pôsobiaceou na dráhe, ktorá je daná súčinom opísaného uhla a polomeru. Tá sa celá premení (ak zanedbáme trenie) na energiu ruky.

$$Fl\alpha_{rad} = \frac{1}{6}mv^2$$

Vytiahneme rýchlosť  $v$

$$v = \sqrt{\frac{6Fl\alpha_{rad}}{m}}$$

Teraz si musíme premeniť uhly na radiány, dostávame 1,05, 1.13 a 1.22. Prislúchajúce rýchlosti sú potom 75,18, 78.25 a 81.20 m/s.

Pre dostrel potrebujeme spočítať šikmý vrh streliva s rýchlosťou  $v$  pod uhlom od vodorovnej osi  $90^\circ - \alpha$ . Pre zvislú a vodorovnú rýchlosť pri vystrelení bude platiť:

$$v_{zv} = v \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = v \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_{vod} = v \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = v \cdot \sin(\alpha)$$

Čas letu je určený zvislou rýchlosťou - bude trvať presne dvojnásobok toho, kým strelivo dosiahne maximálnu výšku:

$$t = \frac{2v_{zv}}{g}$$

Dolet je potom určený vodorovnou rýchlosťou

$$s = v_{vod}t = \frac{2v_{zv}v_{vod}}{g} = \frac{2v^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Po dosadení z rovnice pre rýchlosť dostávame

$$s = \frac{12Fl}{mg} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \alpha_{rad}$$

Po dosadení dostávame 499, 478 a 432 metrov.

Teraz potrebujeme upraviť predchádzajúce rovnice tak, aby sme v nich dostali aj závažie o hmotnosti  $x$  pohybujúce sa rýchlosťou  $v$ . To spotrebuje časť energie pri rozbiehaní, preto bude upravená rovnica pre zákon zachovania energie znieť

$$Fl\alpha_{rad} = \left(\frac{1}{6}m + \frac{1}{2}x\right)v^2$$

a znova po úprave dostávame pre rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{6Fl\alpha_{rad}}{m + 3x}}$$

a pre dostrel

$$s = \frac{12Fl}{(m + 3x)g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \alpha_{rad}$$

Vyjadríme si neznámu hmotnosť  $x$  a dostávame

$$x = \frac{4Fl}{sg} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \alpha_{rad} - \frac{m}{3}$$

Po dosadení potrebného dostrelu  $d$  dostávame maximálne hmotnosti pre jednotlivé polohy zarážky 38,81, 36,51 a 31,41 kg.

## Olympiáda mladých vedcov 2011

### Zadanie teoretickej skúšky

---

Ako vidíme, najvyššiu rýchlosť dosahuje katapult pri poslednej zarážke. To je pochopiteľné, lebo počas celej svojej dráhy zrýchľuje. Dostrel však dosahuje najväčší pri prvej zarážke - dôvod je ten, že vtedy je smer rýchlosti bližší optimálnemu uhlu  $45^\circ$ , streľivo teda síce letí pomalšie, ale pod lepším uhlom, a teda doletí ďalej.