



Fyzika

1. Katapult

Pri dobývaní stredovekých hradov sa ako dôležitý prostriedok na prelomenie hradieb používal katapult. Bolo to zariadenie podobné žeriavu, pričom "ruka" katapultu sa mohla otáčať okolo vodorovnej osi pripevnenej k ťažkej základni. Ruka bola napínaná pružinou, ktorá po uvoľnení spôsobila otáčanie ruky až po zarážku. Na konci ruky sa nachádzala nádoba, do ktorej sa umiestňovalo strelivo - veľký kameň, nádoba s menšími kameňmi či horiaca munícia. Ruka strelivo rozbíhala a po jej zastavení na zarážke strelivo letelo ďalej smerom k hradu.

Predpokladajte, že dĺžka ruky katapultu je $l=5m$. Pružina, ktorá ruku napína, vytvára na konci ruky konštantnú silu $F=9kN$. Ruka štartuje vo vodorovnej polohe a zarážku môžeme umiestniť do troch rôznych pozícií, zodpovedajúcich uhlom α 60° , 65° a 70° od vodorovnej polohy.

Predpokladajte, že ruka je tvorená homogénnou tyčou s hmotnosťou $m=50kg$, hmotnosť nádoby na strelivo a pružiny zanedbajte.

V prvej časti budeme predpokladať, že používané strelivo je zanedbateľne ľahké. Predpokladajte tiež, že katapult strieľa po rovine (zanedbajte nenulovú výšku konca ruky v momente vystrelenia streliva) a odpor vzduchu neuvažujte. Zanedbajte tiež vplyv gravitácie na ruku katapultu.

a) Aká bude veľkosť rýchlosti vystreleného streliva pri jednotlivých použitých zarážkach? Pri ktorej bude najväčšia?

b) Aký bude dostrel katapultu v závislosti od použitej zarážky?

Vojsko útočí na hrad vzdialený $d=150m$.

c) Aká je maximálna hmotnosť streliva, ktorou dokáže katapult zasiahnuť hrad?

d) Pri ktorej polohe zarážky dokáže katapult zasiahnuť hrad maximálnou hmotnosťou streliva?

e) Slovom vysvetlite, ak vám vychádzajú odpovede na otázky a) a d) rôzne.

Pozn: Práca vykonaná rukou katapultu pri otáčavom pohybe je $W = Fl\alpha_{rad}$, kde $\alpha_{rad} = \frac{2\pi\alpha}{360}$ je

uhol vyjadrený v radiánoch. Energia tyče otáčajúcej sa okolo svojho konca rýchlosťou v je $E_{ruka} = \frac{1}{6}mv^2$. Energia telesa pohybujúceho sa rýchlosťou v je $E_{strelivo} = \frac{1}{2}mv^2$. Všetky riešenia najskôr zapisujte symbolicky s pomocou premenných a až potom dosadzujte konkrétne čísla.

Olympiáda mladých vedcov 2011

Zadanie teoretickej skúšky

Riešenie

Najskôr si napíšeme zákon zachovania energie. Energia vložená do sústavy je daná silou pružiny pôsobiaceou na dráhe, ktorá je daná súčinom opísaného uhla a polomeru. Tá sa celá premení (ak zanedbáme trenie) na energiu ruky.

$$Fl\alpha_{rad} = \frac{1}{6}mv^2$$

Vytiahneme rýchlosť v

$$v = \sqrt{\frac{6Fl\alpha_{rad}}{m}}$$

Teraz si musíme premeniť uhly na radiány, dostávame 1,05, 1.13 a 1.22. Prislúchajúce rýchlosti sú potom 75,18, 78.25 a 81.20 m/s.

Pre dostrel potrebujeme spočítať šikmý vrh streliva s rýchlosťou v pod uhlom od vodorovnej osi $90^\circ - \alpha$. Pre zvislú a vodorovnú rýchlosť pri vystrelení bude platiť:

$$v_{zv} = v \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = v \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_{vod} = v \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = v \cdot \sin(\alpha)$$

Čas letu je určený zvislou rýchlosťou - bude trvať presne dvojnásobok toho, kým strelivo dosiahne maximálnu výšku:

$$t = \frac{2v_{zv}}{g}$$

Dolet je potom určený vodorovnou rýchlosťou

$$s = v_{vod}t = \frac{2v_{zv}v_{vod}}{g} = \frac{2v^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

Po dosadení z rovnice pre rýchlosť dostávame

$$s = \frac{12Fl}{mg} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \alpha_{rad}$$

Po dosadení dostávame 499, 478 a 432 metrov.

Teraz potrebujeme upraviť predchádzajúce rovnice tak, aby sme v nich dostali aj závažie o hmotnosti x pohybujúce sa rýchlosťou v . To spotrebuje časť energie pri rozbiehaní, preto bude upravená rovnica pre zákon zachovania energie znieť

$$Fl\alpha_{rad} = \left(\frac{1}{6}m + \frac{1}{2}x\right)v^2$$

a znova po úprave dostávame pre rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{6Fl\alpha_{rad}}{m + 3x}}$$

a pre dostrel

$$s = \frac{12Fl}{(m + 3x)g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \alpha_{rad}$$

Vyjadríme si neznámu hmotnosť x a dostávame

$$x = \frac{4Fl}{sg} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \alpha_{rad} - \frac{m}{3}$$

Po dosadení potrebného dostrelu d dostávame maximálne hmotnosti pre jednotlivé polohy zarážky 38,81, 36,51 a 31,41 kg.

Olympiáda mladých vedcov 2011

Zadanie teoretickej skúšky

Ako vidíme, najvyššiu rýchlosť dosahuje katapult pri poslednej zarážke. To je pochopiteľné, lebo počas celej svojej dráhy zrýchľuje. Dostrel však dosahuje najväčší pri prvej zarážke - dôvod je ten, že vtedy je smer rýchlosti bližší optimálnemu uhlu 45° , streľivo teda síce letí pomalšie, ale pod lepším uhlom, a teda doletí ďalej.